灰色系统理论及应用

第 1节　灰色系统的基本概念

一、灰色系统理论的产生

1、时间

1） 1982年，北荷兰公司的《系统与控制通讯》杂志上发表了我国学者邓聚龙教授的第一篇灰色系统论文《灰色系统的控制问题》

2） 1982年第三期〈华中工学院学报〉上发表了邓聚龙教授的第一篇中文灰色系统论文《灰色控制系统》

——创始人：华中理工大学：邓聚龙

2、一些专著

1） 1985年〈灰色系统（社会．经济）〉（邓聚龙著）为第一部专著。

2） 1985年（邓）〈灰色控制系统〉

3） 1986年（邓）〈灰色预测与决策〉

4） 1987年（邓）〈灰色系统基本方法〉

5） 1988年（邓）〈多维灰色规划〉

6） 1989年《灰色系统论文集》（英文版）

7） 1989年，英文版国际性刊物〈灰色系统〉杂志正式创刊。

二、灰色系统的基本概念

1、系统的概念：（略）

说明：许多系统，诸如社会，经济，农业，工业，生态，生物等 ,是根据研究对象所属的领域和范围来命名的，而灰色系统的命名却不同。

注：系统的划分是有边界的。

2. 灰色系统的概念：

灰色系统是借用颜色的概念来命名的，为什么？在控制论中，人们常用颜色的深浅来形容信息的明确程度，如将内部信息未知的对象称为黑箱（Black Box），这种理和称谓已为人们所普遍接受。

我们用“黑”表示信息未知，用“白”表示信息完全明确，用“灰”表示部分信息明确，而部分信息不明确。相应地，我们将信息完全明确的系统称为白色系统，信息未知的系统称为黑色系统；部分信息明确，部分不明确的系统称为灰色系统。

在人们的社会，经济活动或科研活动中，信息不完全的情况会经常遇到，（举例说明）

信息不完全的情况有以下四种：

1) 元素（参数）信息不完全；
2) 结构信息不完全；
3) 边界信息不完全；
4) 运行行为信息不完全。

	黑（B）	灰（G）	白（W）
1. 从信息上看	未知	不完全	完全
2. 从表象上看	暗	若明若暗	明朗
3. 在过程上	新	新旧交替	旧
4. 在性质上	混沌	多种成分	纯
5. 在方法上	否定	扬弃	肯定
6. 在态度上	放纵	宽容	严厉
7. 从结果上	无解	非唯一解	唯一解

3. 灰色系统问题的特征：

1)“多与少”的辨证统一，“局部”与“整体”的转化，是灰色系统问题的根本特征。

人们在认识，改造世界的 过程中，常常自觉不自觉地通过已经掌握的部分信息（即信息不完全）对事物整体进行分析，通过少量已知信息的筛选，加工，延伸和扩展，深化对系统的认识，再经系统改造，系统重组，提高效率。

2)“非唯一性”原理是灰色系统解决问题所遵循的基本思路，在决策上的体现就是“灰靶思想”。

灰靶是目标非唯一与可约束的统一，也是目标可接近，信息可补充，方案可完善，关系可协调，思维可多向，认识可深化，途径可优化的具体体现。在面对许多可能的解时，能够

通过定性分析，补充信息，确定一个或几个满意解。

“非唯一解”的求解途径是定性分析与定量分析相结合的求解途径，也是灰色系统和数学科学中常常用的有效途径。

4.“灰色”与“模糊”两个概念的区别：

——灰色系统着重外延明确，内涵不明确的对象，如中国人口有十二亿左右，这一数字是 11.5亿∽12.5亿。

——模糊数学着重外延不明确，而内涵明确的对象，如年轻人。

第 2节　灰数的基本概念

一、灰数的定义

我们把只知道大概的范围而不知其确切值的数称为灰数。在应用中，灰数实际上指一个区间或一个一般的数集。

二、灰数的分类

1. 仅有下界的灰数：

有下界而无上界的灰数。$\otimes \in [\underline{a}, \infty)$ 或 $\otimes \in (\underline{a})$

其中 $\underline{a}$ 为灰数 $\otimes$ 的下确界，它是一个确定的数，我们称 $[\underline{a}, \infty)$ 为 $\otimes$ 的“ 取数域 ”，简称 $\otimes$ 的灰域，例如：一棵生长着的大树的重量，再如某地五月份平均气温不低于 18℃等。

2. 仅有上界的灰数：

有上界而无下界的灰数。$\otimes \in (-\infty, \overline{a}]$ 或 $\otimes \in (\overline{a})$

其中 $\overline{a}$ 是灰数 $\otimes$ 的上确界，是确定的数。例如：一项工程的投资；一件电器设备承受的电压和电流通过的最高临界值。

3. 区间灰数：

既有上界又有下界的灰数记为：$\otimes \in [\underline{a}, \overline{a}]$

例如：海豹的重量，某人的身高。

4. 连续灰数与离散灰数：

在某个区间内取有几个值或可数个值的灰数称为离散灰数；如某人年龄在 30-35岁。

取值连续地充满某一区间的灰数称为连续灰数。如某人的身高体重。

5. 黑数与白数：

当 $\otimes \in (-\infty, \infty)$ 或 $\otimes \in (\otimes_1, \otimes_2)$ ，即当 $\otimes$ 的上界和下界皆为无穷或上界，下界都是灰数时，称为黑数；

当 $\otimes \in [\underline{a}, \overline{a}]$，且 $\underline{a} = \overline{a}$ 时，称 $\otimes$ 为白数。

黑数与白数都可以被我们当作一种特殊的灰数来看待。

6. 本征灰数与非本征灰数：

本征灰数：是指暂时还不能找到一个白数作为其“ 代表 ”的灰数，比如一般的事前预测值；宇宙的总能量；准确到秒或微妙的地球的年龄等。

非本征灰数：是凭先验信息或某种手段可以找到一个白数作为其“代表”的灰数。我们称此白数为相应灰数的白化值。记为：$\overline{\otimes}(a)$，它表示以 a为白化值的灰数。例如，托人买一件价格 100元左右的衣服。

7. 信息型灰数：

信息型灰数是指因暂时 缺乏信息而不能肯定其取值的数。

例如：①预计某地区今年夏粮产量在 10万吨以上，$\otimes\in[10,\infty)$；

② 估计某储蓄所年底居民储蓄存款总额将达到 70-90万元，$\otimes\in[70,90]$；

③预计郑州地区五月份最高气温不超过 36℃，$\otimes\in[0,36]$。

由于暂时缺乏信息，不能肯定某数的确切值，而到一定时间后，通过信息补充，灰数可以完全变白，如上述三个灰数，一旦预定的时间终了，就会变成完全确定的白数。

8. 概念型灰数（又称：意愿型灰数）：

是指由人们的某种观念，意愿形成的灰数。如：某人希望至少获得 1万元科研经费，并且越多越好，$\otimes\in[10000,\infty)$；某工厂废品率为 1%，希望大幅度降低，当然越小越好，$\otimes\in[0,0.01]$。

9. 层次型灰数：

是指由层次改变形成的灰数。有的数，从系统的高层次，即宏观层次，整体层次或认识的概括层次上是白的，可到低层次上，即到系统的微观层次，分部层次或认识的深化层次则可能是灰的。

例如：①一个人的身高以（cm）计→白，以万分之一（mm）计→灰。

②叫张三的人，在某个学校→白，在全市范围→灰。

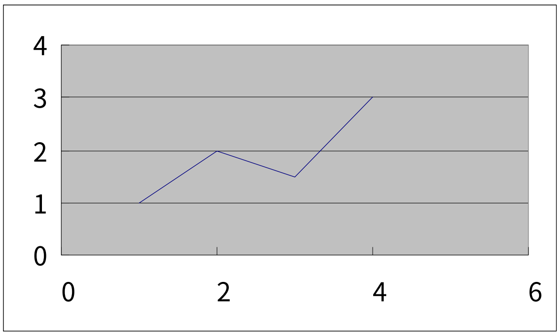
③一个家庭的消费水平以年，月计→白，以时，分，秒记→灰。

第 3节 几种简单的灰序列生成

灰色分析的一个指导思想在于尽可能找到灰数的白化值，以此白化值为代表进行分析，由一组灰数的白化值所组成的序列称为灰序列。

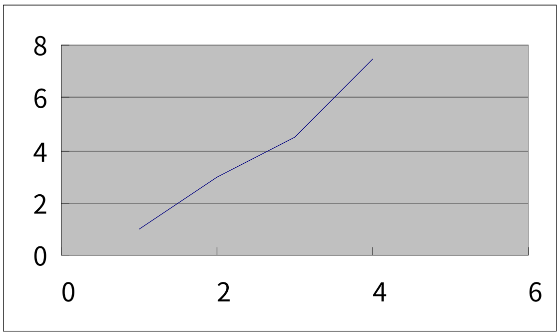
灰色系统理论认为，尽管客观系统表象复杂，数据离乱，但它总是有整体功能的，因此必然蕴涵某种内在规律。关键在于如何选择适当的方式去挖掘它，利用它。一切灰色序列都能通过某种生成弱化其随机性，显现规律性。

如：$X^{(0)}=(1,2,1.5,3)$



对原始数据作一次累加生成，得到序列：$X^{(1)}=(1,3,4.5,7.5)$

则 $X^{(1)}$ 已呈现出明显的增长规律性。



因此，灰色系统是通过原始数据的整理来寻找其变化规律的，这是一种就数据寻找数的现实规律的途径，我们成为灰色序列的生成。

一、均值生成

均值生成是常用的构造新数据，填补老序列空穴，生成新序列的方法，同时对序列还可以起平滑作用。

先介绍几个概念：

设序列：$X=(x(1),x(2),...,x(k),x(k+1),...,x(n))$

则称 $x(k)$ 与 $x(k+1)$ 为 x中的一对紧邻值，$x(k)$ 称为前值，$x(k+1)$ 称为后值；若 $x(n)$ 为新息，则对任意 k≤ n-1,称 $x(k)$ 为老息，因为新息只能有一个。

1. 非紧邻均值生成：

设序列：$X=(x(1),x(2),...,x(k-1),\phi(k),x(k+1),...,x(n))$ 为在 k处有空穴 $\phi(k)$ 的序列，则称：$X^{*}(k)=0.5\times x(k-1)+0.5\times x(k+1)$ 为非紧邻均值生成数，用非紧邻均值生成数填补的空穴所得序列称谓非紧邻均值生成序列。即：

$X=(x(1),x(2),...,x(k-1),x^{*}(k),x(k+1),...,x(n))$

上式中，$x(1)$ 称为初值，$x(k-1)$ 为前界，$x(k+1)$ 为后界，而 $x^{*}(k)$ 为内点。

一个问题：

$X^{*}(k)=0.3\times x(k-1)+0.7\times x(k+1)$ 与 $X^{*}(k)=0.7\times x(k-1)+0.3\times x(k+1)$

二者有何区别？

2. 紧邻均值生成

设序列：$X=(x(1),x(2),...,x(n))$

若：$z(k)=0.5\times x(k)+0.5\times x(k-1)$

则称 $z(k)$ 为紧邻均值生成数，由紧邻均值生成数构成的数列称为紧邻均值生成数列。在 GM建模中，常用紧邻信息的均值生成，它是以原始序列为基础，构成新序列的方法。

设：$X=(x(1),x(2),...,x(n))$ 为 n元序列，z 是 x的紧邻均值生成序列，则 z为 n-1元序列。

$Z=(z(2),z(3),...,z(n))$

事实上，我们无法生成 $z(1)$,因为：

$z(1)=0.5\times x(1)+0.5\times x(0)$

但 $x(0)=\phi(0)$ 为空穴，是无法填补的。

为此，有的书干脆将 $z(1)=x(1)$。

二、累加生成与累减生成

累加生成是使灰过程由灰变白的一种方法，它在灰色系统理论中占有极其重要的地位。通过累加可以看出灰量积累过程的发展态势，使离乱的原始数据中蕴涵的积分特性或规律充分显露。

例如：① 一个家庭的支出，按日，按月计，按年计；

② 一种农作物的单粒重，千粒重，单位体积重；

③ 一个重型机械设备的厂家，由于产品生产周期长，其产量，产值若按天计，→灰，若按年计→白。

累减生成是在需要获得增量信息时常用的生成，同时累减生成时累加生成起还原作用，累加与累减是互逆的。

1、累加生成 （accumulated generating operation）

设 $X^{(0)}$ 为原始数列，D为序列算子：

$X^{(0)}=(x^{(0)}(1),x^{(0)}(2),\ldots x^{(0)}(k),\ldots x^{(0)}(n))$

对 $X^{(0)}$ 作一次 累加生成，得新序列 $X^{(0)}D$ ：

$$X^{(0)}D=(x^{(0)}(1)d,x^{(0)}(2)d,\ldots,x^{(0)}(k)d,\ldots,x^{(0)}(n)d)$$

其中：$x^{(0)}(k)d=\sum_{i=1}^{k}x^{0}(i)$ ，$k=1,2,\ldots,n$

则称 D为 $X^{(0)}$ 的一次累加生成算子，记为 1— AGO。

对原始序列作 r次累加生成，记为 r— AGO:

$$X^{(0)}D^{r}=(x^{(r)}(1),x^{(r)}(2),\ldots,x^{(r)}(k),\ldots x^{(r)}(n))$$

其中：$x^{(r)}(k)=\sum_{i=1}^{k}x^{(r-1)}(i)$ ，$k=1,2,\ldots,n$

一次累加生也可以记为：

$$X^{(0)}D=(x^{(1)}(1),x^{(1)}(2),\ldots x^{(1)}(k),\ldots,x^{(1)}(n))$$

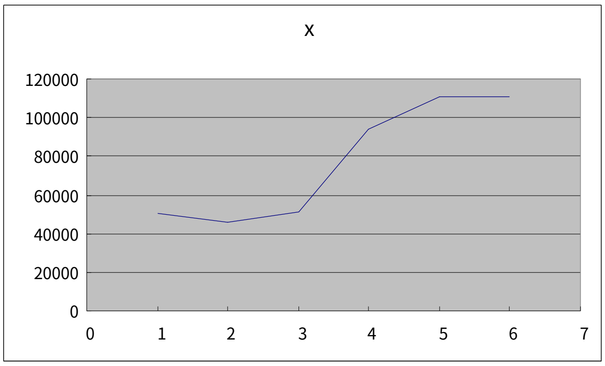
累加生成的灰指数规律：

一般的非负准光滑序列经过累加生成后，都会减少随机性，呈现出近似的指数增长规律，原始序列越光滑，生成后指数规律越明显。

如某市自行车销售量数据序列如下：单位：辆

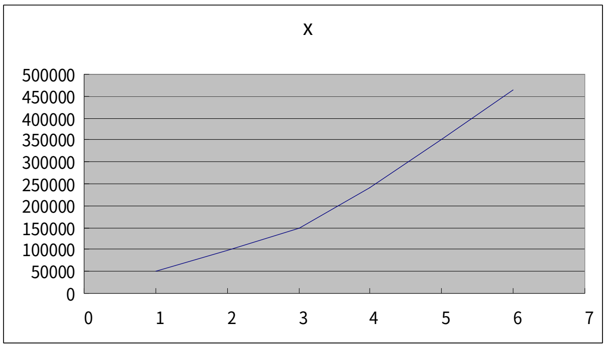
$X^{(0)}$ = (50810,46110,51177,93775,110574,110524)

其数据代表 2004年～2009年的销售量。



对 $X^{(0)}$ 作一次累加得到新数列 $X^{(1)}$：

$X^{(1)}$ =(50810,96920,148097,241872,352446,462970)



拟合曲线 $X^{(1)}$ 为指数增长：

$$X^{(1)} = C \times e^{ak} + b$$

2. 累减生成：(IAGO)

设为 $X^{(0)}$ 原始数列，D为序列算子：

$$X^{(0)} = (x^{(0)}(1), x^{(2)}(2), \ldots, x^{(0)}(k), \ldots, x^{(0)}(n))$$

$$X^{(0)}D = (x^{(0)}(1)d, x^{(0)}(2)d, \ldots, x^{(0)}(k)d, \ldots x^{(0)}(n)d)$$

其中：$X^{(0)}(k)d = x^{(0)}(k) - x^{(0)}(k-1)$

则称 D为 $X^{(0)}$ 的一次累减生成算子，记为 1-IAGO。

对原始数列 $X^{(0)}$ 作 r 次累减生成，则记为 r-IAGO。

$$X^{(0)}d^{-r} = (x^{(-r)}(1), x^{(-r)}(2), \ldots, x^{(-r)}(k), \ldots, x^{(-r)}(n))$$

其中：

$$X^{(-r)}(k) = x^{(-(r-1))}(k) - x^{(-(r-1))}(k-1)$$

$$k = 1,2,\ldots,n$$

三、灰关联算子集

1. 初值像

设 $X_i=(x_i(1),x_i(2),\ldots,x_i(k),\ldots,x_i(n))$ 为因素 x_i 的行为序列，D_1 为序列算子。则新序列：

$$X_iD_1=(x_i(1)d_1,x_i(2)d_1,\ldots,x_i(k)d_1,\ldots,x_i(n)d_1)$$

其中：$X_i(k)d_1=x_i(k)/x_i(1)$

$k=1,2,\ldots,n$

称 D_1 为初值化算子，X_i 为原象，X_iD_1 为 X_i 在初值化算子 D_1 下的象，简称初值象。

2. 均值象

设 $X_i=(x_i(1),x_i(2),\ldots,x_i(k),\ldots,x_i(n))$ 为因素 X_i 的行为序列，D_2 为序列算子。则新序列：

$$X_iD_2=(x_i(1)d_2,x_2(2)d_2,\ldots,x_i(k)d_2,\ldots,x_i(n)d_2)$$

其中：$X_i(k)d_2=\dfrac{X_i(k)}{\overline{X}_i}$， $\overline{X_i}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}X_i(k)$

$k=1,2,\ldots,n$

则称 X_i 为均值化算子，X_iD_2 为 X_i 在均值化算子 D_2 下的象，简称均值象。

3. 区间值象

设 $X_i=(x_i(1),x_i(2),\ldots,x_i(k),\ldots,x_i(n))$ 为因素 X_i 的行为序列，D_3 为序列算子。则新序列：$X_iD_3=(x_i(1)d_3,x_i(2)d_3,\ldots,x_i(k)d_3,\ldots,x_i(n)d_3)$

其中：$X_i(k)d_3=\dfrac{X_i(k)-\min X_i(k)}{\max X_i(k)-\min X_i(k)}$ ，$k=1,2,\ldots,n$

则称 D_3 为区间值化算子，称 X_iD_3 为区间值象。

4. 逆化象

设：$X_i=(x_i(1),x_i(2),\ldots,x_i(k),\ldots,x_i(n))$

为因素 X_i 的行为序列，若 $X_i(k)\in[0,1]$ ，$k=1,2,\ldots,n$

D_4 为序列算子，则新序列：

$$X_iD_4=(x_i(1)d_4,x_i(2)d_4,\ldots,x_i(k)d_4,\ldots,x_i(n)d_4)$$

其中：$X_i(k)d_4=1-X_i(k)$

则称 D_4 为逆化算子，X_iD_4 为行为序列 X_i 在逆化算子 D_4 下的象，简称逆化象。

5. 倒数化象

设 $X_i=(x_i(1),x_i(2),...,x_i(k),...,x_i(n))$ 为因素 X_i 的行为序列，D_5 为序列算子。则新序列：

$$X_iD_5=(x_i(1)d_5,x_i(2)d_5,...,x_i(k)d_5,...,x_i(n)d_5)$$

其中：$X_i(k)d_5=1/X_i(k)$

则称 D_5 为倒数化算子，X_iD_5 为倒数化象。

6. 始点零化象

设 $X_i=(x_i(1),x_i(2),...,x_i(k),...,x_i(n))$ 为因素 X_i 的行为序列，D_6 为序列算子。则新序列：

$$X_iD_5=(x_i(1)d_6,x_i(2)d_6,...,x_i(k)d_6,...,x_i(n)d_6)$$

其中：$X_i(k)d_6=X_i(k)-X_i(1)$

称 D_6 为始点零化算子，X_iD_6 为 X_i 的始点零化象。

说明：

1) 初值化算子 D_1，均值化算子 D_2，区间值化算子 D_3，皆可使系统行为序列无量纲化，且在数量上统一；

2) 一般地，D_1，D_2，D_3 不宜混合重叠作用，在进行系统因素分析时，可根据实际情况选中其中一个；

3) 为序列 X_i 由增长序列转化为衰减序列或由衰减序列转化为增长序列。

练习：

试将下列灰原始序列作如下处理：

=（100，200，400，500）

① 2-AGO; ② 1-IAGO; ③ 初值化；④ 均值化；

② ⑤ 区间值化；⑥ 倒数化；⑦ 始点零化。

第 4节 灰关联度及优势分析

一、灰关联分析的重要意义

在系统分析过程中，我们关心的是：在决定系统发展态势的众多因素当中，那些是主要因素，那些是次要因素？那些因素对系统发展影响大，那些因素对系统发展影响小？那些因素对系统发展起推动作用，需强化？那些因素对系统发展起阻碍作用，需加以抑制？等
数理统计中的回归分析、方差分析、主成份分析等都是用来进行系统分析的方法，这些方法有下列不足之处：

① 要求有大量数据，数据量少就难以找到统计规律。

② 要求样本服从某个典型的概率分布，要求各因素数据与系统特征数据之间呈线性关系。这种要求十分苛刻，难以满足。

③ 计算量大，一般要靠计算机帮助。

④ 可能出现量化结果与定性分析结果不符的现象，导致系统的关系和规律遭到歪曲和颠倒。尤其是我国统计数据十分有限，而且现有数据灰度较大，再加上人为的原因，许多数据都出现几次大起大落，没有什么典型的分布规律。因此，利用数理统计方法往往难以凑效。利用灰色分析方法，在一定程度上可以克服上述几个方面的局限性，如果应用恰当，便会产生数理统计分析所不能产生的结果。

二、灰关联系数（GRC）和灰关联度(GRG)的计算

(一) 灰关联定理 I：

1、灰关联系数

$$\xi_i(k)=\frac{\min_i\min_k\left|x_0^{(1)}(k)-x_i^{(1)}(k)\right|+\rho\times\max_i\max_k\left|x_0^{(1)}(k)-x_i^{(1)}(k)\right|}{\left|x_0^{(1)}(k)-x_i^{(1)}(k)\right|+\rho\times\max_i\max_k\left|x_0^{(1)}(k)-x_i^{(1)}(k)\right|}$$

上式中：$\min_i\min_k\left|x_0^{(1)}(k)-x_i^{(1)}(k)\right|$表示二级最小差;

$\max_i\max_k\left|x_0^{(1)}(k)-x_i^{(1)}(k)\right|$表示二级最大差.

2、灰关联度

$$r_i=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_{(i)}(k)$$

设有参考序列$x_0^{(1)}$ $x_0^{(1)}$ $x_0^{(1)}$和各被比较数列$x_i^{(1)}$,情况如下:

$$x_0^{(1)} = \left[x_0^{(1)}(1), x_0^{(1)}(2), \ldots, x_0^{(1)}(k), \ldots, x_0^{(1)}(n)\right]$$

$$x_1^{(1)} = \left[x_1^{(1)}(1), x_1^{(1)}(2), \ldots, x_1^{(1)}(k), \ldots, x_1^{(1)}(n)\right]$$

$$x_2^{(1)} = \left[x_2^{(1)}(1), x_2^{(1)}(2), \ldots, x_2^{(1)}(k), \ldots, x_2^{(1)}(n)\right]$$

$$\vdots$$

$$x_i^{(1)} = \left[x_i^{(1)}(1), x_i^{(1)}(2), \ldots, x_i^{(1)}(k), \ldots, x_i^{(1)}(n)\right]$$

$$\vdots$$

$$x_m^{(1)} = \left[x_m^{(1)}(1), x_m^{(1)}(2), \ldots, x_m^{(1)}(k), \ldots, x_m^{(1)}(n)\right]$$

例一：

河南省某县乡镇企业发展比较快，2006～2009年产值平均年递增 51.6%，乡镇企业经济在全县经济发展中占有重要地位。 2009年，全县乡镇企业产值达到 35388万元，占工农业总产值的 60%。如何有效的加速乡镇企业发展，促进经济起飞，是全县普遍关心的问题。据分析，乡镇企业产值主要与固定资产，流动资金，劳动。企业留利四个因素有关。长葛县乡镇企业产值及相关因素数据为：

年份	2006	2007	2008	2009
x_0 （产值）	10155	12588	23408	35388
x_1 （固资）	3799	3605	5460	6982
x_2 （流资）	1752	2160	2213	4753
x_3 （劳力）	24186	45590	57685	85540
x_4 （留利）	1164	1788	3134	4478

问：该县乡镇企业的产值与各因素的关联度有多大？

解： 第一步：使各序列无量纲化——初值化：

$$X_0^{(1)} = (1.00, 1.24, 2.31, 3.48)$$

$X_1^{(1)} = (1.00, 0.95, 1.44, 1.84)$

$X_2^{(1)} = (1.00, 1.23, 1.26, 2.71)$

$X_3^{(1)} = (1.00, 1.88, 2.39, 3.54)$

$X_4^{(1)} = (1.00, 1.54, 2.69, 3.85)$

第二步：求各差序列：

$X_0^{(1)} - X_1^{(1)} = (0.00, 0.29, 0.87, 1.64)$

$X_0^{(1)} - X_2^{(1)} = (0.00, 0.01, 1.04, 0.77)$

$X_0^{(1)} - X_3^{(1)} = (0.00, -0.64, -0.08, -0.06)$

$X_0^{(1)} - X_4^{(1)} = (0.00, -0.30, -0.38, -0.36)$

因此：$\min_i \min_k \left| X_0^{(1)}(k) - X_i^{(1)}(k) \right| = 0$

$\max_i \max_k \left| X_0^{(1)}(k) - X_i^{(1)}(k) \right| = \max_i (1.64, 1.05, -0.64, -0.38) = 1.64$

第三步：求各点的灰关联系数：

$$\xi_{(i)}(k) = \frac{\min_i \min_k \left| x_0^{(1)}(k) - x_i^{(1)}(k) \right| + \rho \times \max_i \max_k \left| x_0^{(1)}(k) - x_i^{(1)}(k) \right|}{\left| x_0^{(1)}(k) - x_i^{(1)}(k) \right| + \rho \times \max_i \max_k \left| x_0^{(1)}(k) - x_i^{(1)}(k) \right|}$$

由于 $\min_i \min_k \left| x_0^{(1)}(k) - x_i^{(1)}(k) \right| = 0$

因此，$\xi_{(i)}(k) = \dfrac{\rho \times \max_i \max_k \left| X_0^{(1)}(k) - X_i^{(1)}(k) \right|}{\left| X_0^{(1)}(k) - X_i^{(1)}(k) \right| + \rho \times \max_i \max_k \left| X_0^{(1)}(k) - X_i^{(1)}(k) \right|}$

通常取则：$\rho = 0.5$

$\xi_{(1)}(k) = (1.000, 0.739, 0.487, 0.333)$

$\xi_{(2)}(k) = (1.000, 0.992, 0.441, 0.516)$

$\xi_{(3)}(k) = (1.000, 0.561, 0.911, 0.941)$

$\xi_{(4)}(k) = (1.000, 0.735, 0.680, 0.694)$

第四步：求各因素的关联度

$$r_i = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \xi_{(i)}(k)$$

$$r_1=\frac{1}{4}\times(1.000+0.739+0.487+0.333)=0.640$$

$$r_2=\frac{1}{4}\times(1.000+0.992+0.441+0.516)=0.737$$

$$r_3=\frac{1}{4}\times(1.000+0.561+0.911+0.941)=0.853$$

$$r_4=\frac{1}{4}\times(1.000+0.735+0.680+0.694)=0.777$$

第五步：结果分析

由以上可知：$r_3>r_4>r_2>r_1$，说明：x_3为最优因素，x_4次之，x_2又次之，x_1最劣。

即：劳动力对乡镇企业产值影响最大，企业留利对产值影响仅次于劳动力，固定资产对产值的影响最小。这一结果与该县实际非常吻合，这个县的乡镇企业主要是劳动密集型产业，产值的增长在很大程度上是靠增加劳动力实现的。因此，积极发挥劳动密集型产业是乡镇企业的大方向。另外，企业留利主要用于职工福利和企业改造技术，有有一句话说得如：“将欲取之必先予之”。

（二）灰关联定理 II

设有参考序列$X_0^{(1)}$和各被比较数列$X_i^{(1)}$，情况如下：

$$X_0^{(1)}=\left[x_0^{(1)}(1),x_0^{(1)}(2),\dots,x_0^{(1)}(k),\dots,x_0^{(1)}(n)\right]$$

$$X_1^{(1)}=\left[x_1^{(1)}(1),x_1^{(1)}(2),\dots,x_1^{(1)}(k),\dots,x_1^{(1)}(n)\right]$$

$$X_2^{(1)}=\left[x_2^{(1)}(1),x_2^{(1)}(2),\dots,x_2^{(1)}(k),\dots,x_2^{(1)}(n)\right]$$

.

.

.

$$X_i^{(1)}=\left[x_i^{(1)}(1),x_i^{(1)}(2),\dots,x_i^{(1)}(k),\dots x_i^{(1)}(n)\right]$$

.

.

.

$$X_m^{(1)}=\left[x_m^{(1)}(1),x_m^{(1)}(2),\dots x_m^{(1)}(k),\dots x_m^{(1)}(k)\right]$$

上述 m+1个序列的始点零化象分别是：

$X_0^0, X_1^0, X_2^0,\cdots,\ X_i^0,\cdots X_m^0$

上述 m+1个序列的初值象分别是：$X'_0\ ,X'_1\ ,X'_2\ ,\cdots\ ,X'_m$

对这些初值象作始点零化处理，得到相应序列：

$X_0^{'0}, X_1^{'0}, X_2^{'0}, \dots, X_i^{'0}, \dots, X_m^{'0}$

则：

1、绝对关联度的计算方法：

$$\varepsilon_{0i} = \frac{1+|s_0|+|s_i|}{1+|s_0|+|s_i|+|s_i - s_0|}$$

其中：$|s_0| = \left|\sum_{k=2}^{n-1} X_0^0(k) + \frac{1}{2}X_0^0(n)\right|$

$$|s_i| = \left|\sum_{k=2}^{n-1} X_i^0(k) + \frac{1}{2}X_0^0(n)\right|$$

$$|s_i - s_0| = \left|\sum_{k=2}^{n-1}\left[X_i^0(k) - X_0^0(k)\right] + \frac{1}{2}\left[X_i^0(n) - X_0^0(n)\right]\right|$$

$X_0^0(k)$——代表参考序列的始点零化值

$X_i^0(k)$——代表各被比较数列的始点零化象

2、相对关联度的计算方法：

$$r_{0i} = \frac{1+|s_0^{'}|+|s_i^{'}|}{1+|s_0^{'}|+|s_i^{'}|+|s_i^{'} - s_0^{'}|}$$

其中：

$$|s_0^{'}| = \left|\sum_{k=2}^{n-1} X_0^{10}(k) + \frac{1}{2}X_0^{10}(n)\right|$$

$$|s_i^{'}| = \left|\sum_{k=2}^{n-1} X_i^{10}(k) + \frac{1}{2}X_i^{10}(n)\right|$$

$$|s_i - s_0^{'}|' = \left|\sum_{k=2}^{n-1}\left[X_i^{10}(k) - X_0^{10}(k)\right] + \frac{1}{2}\left[X_i^{10}(n) - X_0^{10}(n)\right]\right|$$

$X_0^{'0}$———代表参考序列初值化后的始点零化象

$X_i^{'0}$———代表各被比较数列初值化后的始点零化象

3、综合关联度的计算方法：

$$\theta_{0i} = \rho \times \varepsilon_{0i} + (1-\rho) r_{0i}$$

通常取 $\rho = 0.5$

应用：我们还是利用 P_{13} 中例一的资料，计算灰关联度。

解：第一步：求绝对关联度

① 原始序列的始点零化象是：

$$X_0^0 = (0, 2433, 13253, 25233)$$
$$X_1^0 = (0, -194, 1661, 3183)$$
$$X_2^0 = (0, 408, 461, 3001)$$
$$X_3^0 = (0, 21404, 33499, 61354)$$
$$X_4^0 = (0, 624, 1970, 3314)$$

② 计算$|s_0|$和$|s_i|$

$$|s_0| = \left|2433 + 13253 + \frac{1}{2} \times 25233\right| = 28302.5$$

$$|s_1| = \left|-194 + 1661 + \frac{1}{2} \times 3183\right| = 3058.5$$

$$|s_2| = \left|408 + 461 + \frac{1}{2} \times 3001\right| = 2369.5$$

$$|s_3| = \left|21404 + 33499 + \frac{1}{2} \times 61354\right| = 85580$$

$$|s_4| = \left|624 + 1970 + \frac{1}{2} \times 3314\right| = 4251$$

③ 计算$|s_i - s_0|$

$$|s_1 - s_0| = \left|[(-194) - 2433] + (1661 - 13253) + \frac{1}{2}(3183 - 25233)\right| = 25244$$

$$|s_2 - s_0| = \left|(408 - 2433) + (461 - 13253) + \frac{1}{2}(3001 - 25233)\right| = 25933$$

$$|s_3 - s_0| = \left|(21404 - 2433) + (33499 - 13253) + \frac{1}{2}(61354 - 25233)\right| = 57277.5$$

$$|s_4 - s_0| = \left|(624 - 2433) + (1970 - 13253) + \frac{1}{2}(3314 - 25233)\right| = 24051.5$$

④ 计算绝对关联度：

$$\varepsilon_{01}=\frac{1+|s_0|+|s_1|}{1+|s_0|+|s_1|+|s_1-s_0|}=\frac{1+28302.5+3058.5}{1+28302.5+3058.5+25244}=0.55404$$

$$\varepsilon_{02}=\frac{1+|s_0|+|s_2|}{1+|s_0|+|s_2|+|s_2-s_0|}=\frac{1+28302.5+2369.5}{1+28302.5+2369.5+25933}=0.54187$$

$$\varepsilon_{03}=\frac{1+|s_0|+|s_3|}{1+|s_0|+|s_3|+|s_3-s_0|}=\frac{1+28302.5+85580}{1+28302.5+85580+57277.5}=0.66536$$

$$\varepsilon_{04}=\frac{1+|s_0|+|s_4|}{1+|s_0|+|s_4|+|s_4-s_0|}=\frac{1+28302.5+4251}{1+28302.5+4251+24051.5}=0.57511$$

第二步：求相对关联度

① 原始序列的初值象是：

$$X_0^{'}=(1.000,1.2396,2.3051,3.4848)$$
$$X_1^{'}=(1.000,0.9489,1.4372,1.8379)$$
$$X_2^{'}=(1.000,1.2329,1.2631,2.7129)$$
$$X_3^{'}=(1.000,1.8850,2.3851,3.5368)$$
$$X_4^{'}=(1.000,1.5361,2.6924,3.8471)$$

② 原始序列初值象后的始点零化象是：

$$X_0^{'0}=(0.0000,0.2396,1.3051,2.4848)$$
$$X_1^{'0}=(0.0000,-0.0511,0.4372,0.8379)$$
$$X_2^{'0}=(0.0000,0.2329,0.2631,1.7129)$$
$$X_3^{'0}=0.0000,0.8850,1.3851,2.5368)$$
$$X_4^{'0}=(0.0000,0.5361,1.6924,2.8471)$$

③ 计算$|s_0^{'}|$和$|s_i^{'}|$

$$|s_0^{'}|=\left|0.2396+1.3051+\frac{1}{2}\times 2.4848\right|=2.7871$$

$$|s_1^{'}|=\left|-0.0511+0.4372+\frac{1}{2}\times 0.8379\right|=0.8051$$

$$|s_2^{'}|=\left|0.2329+0.2631+\frac{1}{2}\times 1.7129\right|=1.3525$$

$$|s_3^{'}|=\left|0.8850+1.3851+\frac{1}{2}\times 2.5368\right|=3.5384$$

$$|s_4^{'}|=\left|0.5361+1.6924+\frac{1}{2}\times 2.8471\right|=3.6521$$

④ 计算$|s_i^{'}-s_0^{'}|$

$\left|s_1^{'} - s_0^{'}\right| = 1.98197$ $\left|s_2^{'} - s_0^{'}\right| = 1.43460$

$\left|s_3^{'} - s_0^{'}\right| = 0.75136$ $\left|s_4^{'} - s_0^{'}\right| = 0.86501$

⑤ 计算相对关联度：

$r_{01} = 0.6985$ $r_{02} = 0.7818$

$r_{03} = 0.9070$ $r_{04} = 0.8958$

第三步：求综合关联度，取$\rho = 0.5$

$$Q_{01} = 0.5 \times 0.5540 + (1-0.5) \times 0.6985 = 0.6263$$
$$Q_{02} = 0.5 \times 0.5419 + (1-0.5) \times 0.7818 = 0.6618$$
$$Q_{03} = 0.5 \times 0.6654 + (1-0.5) \times 0.9070 = 0.7862$$
$$Q_{04} = 0.5 \times 0.5751 + (1-0.5) \times 0.8958 = 0.7355$$

结果分析：

$\because Q_{03} > Q_{04} > Q_{02} > Q_{01}$

$\therefore X_3 > X_4 > X_2 > X_1$

三、优势分析

在前面介绍的灰关联分析中，分析了一个因素（参考序列）与多个因素（被比较数列）的灰关联度。而在优势分析当中，有多个因素（称为母序列）与另外多个因素（称为子序列）的灰关联度，共同构成了灰关联矩阵，其分析方法与灰关联的分析方法相同。

例二：

设某地区某企业的产值序列为 y_1，总收入为 y_2，净产值为 y_3，工资水平为 x_1，固定资产为 x_2，流动资金为 x_3，企业留利为 x_4，劳动力为 x_5。

	年份	2005	2006	2007	2008	2009
母序列	Y_1（产值）	170.00	174.00	197.00	216.40	235.80
	Y_2（总收入）	57.55	70.74	76.80	80.70	89.85
	Y_3（净产值）	68.56	70.00	85.38	99.83	103.40
子序列	X_1（工资）	308.58	310.00	295.00	346.00	367.00
	X_2（固资）	195.40	189.90	187.20	205.00	222.70
	X_3（流资）	24.60	21.00	12.20	15.10	14.57
	X_4（留利）	20.00	25.60	23.30	29.20	30.00
	X_5（劳力）	18.98	19.00	22.30	23.50	27.66

解：

第一步：先求 y_1 对 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 的灰关联度。

① 绝对关联度分别是：

$\varepsilon_{11}=0.7481$ $\varepsilon_{12}=0.5454$ $\varepsilon_{13}=0.6400$ $\varepsilon_{14}=0.6065$ $\varepsilon_{15}=0.5573$

② 相对关联度分别是：

$r_{11}=0.7944$ $r_{12}=0.7389$ $r_{13}=0.8300$ $r_{14}=0.8471$ $r_{15}=0.9974$

③ 综合关联度分别是：

$Q_{11}=0.7713$ $Q_{12}=0.6421$ $Q_{13}=0.7350$ $Q_{14}=0.7268$ $Q_{15}=0.7773$

第二步： 用同样的方法计算 y_2, y_3 分别对 x_i 的灰关联度。

第三步：写出灰关联矩阵：

① 绝对关联矩阵（A）是:

$$A=\begin{pmatrix}\varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} & \varepsilon_{14} & \varepsilon_{15}\\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{24} & \varepsilon_{25}\\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} & \varepsilon_{34} & \varepsilon_{35}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.7481 & 0.5454 & 0.6400 & 0.6065 & 0.5573\\ 0.8805 & 0.5696 & 0.7147 & 0.6633 & 0.5879\\ 0.9076 & 0.5745 & 0.7300 & 0.6750 & 0.5942\end{pmatrix}$$

① 相对关联度矩阵（B）是：

$$B=\begin{pmatrix}r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} & r_{15}\\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & r_{24} & r_{25}\\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & r_{34} & r_{35}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.7944 & 0.7389 & 0.8300 & 0.8471 & 0.9974\\ 0.6937 & 0.6571 & 0.9982 & 0.9738 & 0.8272\\ 0.7291 & 0.6859 & 0.9241 & 0.9460 & 0.8871\end{pmatrix}$$

② 综合关联度矩阵（C）是：

$$C=\begin{pmatrix}Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & Q_{14} & Q_{15}\\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} & Q_{24} & Q_{25}\\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} & Q_{34} & Q_{35}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.7713 & 0.6421 & 0.7350 & 0.7268 & 0.7773\\ 0.7871 & 0.6133 & 0.8565 & 0.8186 & 0.7075\\ 0.8184 & 0.6302 & 0.8270 & 0.8105 & 0.7406\end{pmatrix}$$

第四步：利用灰关联矩阵进行优势分析

设 i 表示母序列，i=1,2,3, j 表示子序列，j=1,2,3,4,5

① 从绝对关联度矩阵（A）来看：

$$\because \sum_{j=1}^{5}\varepsilon_{1j}=3.097 \quad \sum_{j=1}^{5}\varepsilon_{2j}=3.416 \quad \sum_{j=1}^{5}\varepsilon_{3j}=3.481$$

$\therefore$ $y_3 > y_2 > y_1 \rightarrow$ y_3 为准优特征

又∵ $\sum_{i=1}^{3}\varepsilon_{i1}=2.536 \quad \sum_{i=1}^{3}\varepsilon_{i2}=1.689 \quad \sum_{i=1}^{3}\varepsilon_{i3}=2.085$

$\sum_{i=1}^{3}\varepsilon_{i4}=1.945 \quad \sum_{i=1}^{3}\varepsilon_{i5}=1.739$

∴ $x_1 > x_3 > x_4 > x_5 > x_2 \to x_1$为准优因素

② 从相对关联度矩阵（B）来看：

∵ $\sum_{j=1}^{5}r_{1j}=4.2078 \quad \sum_{j=1}^{5}r_{2j}=4.1500 \quad \sum_{j=1}^{5}r_{3j}=4.1722$

∴ $y_1 > y_3 > y_2 \to y_1$为准优特征

又 ∵ $\sum_{i=1}^{3}r_{i1}=2.2172 \quad \sum_{i=1}^{3}r_{i2}=2.0819 \quad \sum_{i=1}^{3}r_{i3}=2.7524$

$\sum_{i=1}^{3}r_{i4}=2.7669 \quad \sum_{i=1}^{3}r_{i5}=2.7116$

∴ $x_4 > x_3 > x_5 > x_1 > x_2 \to x_4$为准优因素。

③ 从综合关联度矩阵来看（C）：

∵ $\sum_{j=1}^{5}Q_{1j}=3.6525 \quad \sum_{j=1}^{5}Q_{2j}=3.7830 \quad \sum_{j=1}^{5}Q_{3j}=3.8267$

∴ $y_3 > y_2 > y_1 \to y_3$为准优特征

又 ∵ $\sum_{i=1}^{3}Q_{i1}=2.3767 \quad \sum_{i=1}^{3}Q_{i2}=1.8857 \quad \sum_{i=1}^{3}Q_{i3}=2.4185$

$\sum_{i=1}^{3}Q_{i4}=2.3558 \quad \sum_{i=1}^{3}Q_{i5}=2.2255$

∴ $x_3 > x_1 > x_4 > x_5 > x_2 \to x_3$为准优因素

三种关联序分析的结果之所以不完全一致，是由于绝对关联序是从绝对量的关系着眼，相对关联序是从各时刻观测数据相对于始点的变化速率着眼，而综合关联序则是综合绝对关联度的绝对量关系和相对关联度的变化速率关系之后来考察的。

在实际问题中，可根据具体情况选择其中的一种关联序。为简便起见，当系统特征行为序列（母序列）和相关因素序列（子序列）皆经过特定的灰关联算子作用之后，只考虑其绝对关联序即可。

第 5节 灰色预测

一、GM(1,1)模型

GM 模型是利用灰色理论而建立的动态模型，其含义是：G　M　　(1,　1)

↑　↑　　↑　↑

Grey Model　1 阶　1 个变量

设：$X^{(0)}$ 为非负序列：$X^{(0)}=[x^{(0)}(1),x^{(0)}(2),...,x^{(0)}(n)]$

其中：$x^{(0)}(k)\geq 0$, k=1,2,…n

$x^{(1)}$ 为 $x^{(0)}$ 的 1—AGO 序列：$X^{(1)}=[x^{(1)}(1),x^{(2)}(2),...,x^{(1)}(n)]$

上式中：$x^{(1)}(k)=\sum_{i=1}^{k}x^{(0)}(i)$

$Z^{(1)}$ 为 $X^{(1)}$ 的紧邻均值生成序列

$Z^{(1)}=[z^{(1)}(2),z^{(1)}(3),...,z^{(1)}(n)]$，其中：$Z^{(1)}(k)=\left[x^{(1)}(k)+x^{(1)}(k+1)\ \right]/2$

称：$X^{(0)}(k)+aZ^{(1)}(k)=b\Rightarrow X^{(0)}(k)=-Z^{(1)}(k)\times a+1\times b$　（其中：a,b为待定系数）为 GM(1,1)模型。

令：

$$Y=\begin{bmatrix}X^{(0)}(2)\\X^{(0)}(3)\\\vdots\\X^{(0)}(n)\end{bmatrix}\qquad X=\begin{bmatrix}-Z^{(1)}(2) & 1\\-Z^{(1)}(3) & 1\\\vdots & \vdots\\-Z^{(1)}(n) & 1\end{bmatrix}$$

则待定系数 a,b由下列式子确定：

$$[a,\quad b]^T=(X^TX)^{-1}X^TY$$

GM(1,1)灰微分方程的一般形式为：$\dfrac{dx^{(1)}}{dt}+ax^{(1)}=b$

该微分方程的解（即时间响应式）为：

$$\hat{X}^{(1)}(k+1)=[x^{(0)}(1)-\frac{b}{a}]e^{-ak}+\frac{b}{a}$$

其还原值为：$\hat{X}^{(0)}(k+1)=\hat{X}^{(1)}(k+1)-\hat{X}^{(1)}(k)$

例三：

某乡镇 2005-2009年总人口如下：

年度	2005	2006	2007	2008	2009
总人口(万人)	2.874	3.278	3.337	3.39	3.679

试用 GM(1,1)模型预测 2010年的总人口。

解：第一步，对 $X^{(0)}$ 作 1-AGO得：

$$X^{(1)}=[x^{(1)}(1),x^{(1)}(2),x^{(1)}(3),x^{(1)}(4),x^{(1)}(5)]=(2.874,6.152,9.489,12.879,16.558)$$

第二步：对 $X^{(1)}$ 作紧邻均值生成：

令；$Z^{(1)}(k)=0.5X^{(1)}(k)+0.5X^{(1)}(k-1)$ 得：

$$Z^{(1)}=[z^{(1)}(2),z^{(1)}(3),z^{(1)}(4),z^{(1)}(5)]=(4.513,7.821,11.184,14.719)$$

第三步：计算系数 a,b：

$$B=\begin{bmatrix}-z^{(1)}(2) & 1\\ -z^{(1)}(3) & 1\\ -z^{(1)}(4) & 1\\ -z^{(1)}(5) & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4.513 & 1\\ -7.821 & 1\\ -11.184 & 1\\ -14.719 & 1\end{bmatrix}\qquad Y=\begin{bmatrix}x^{(0)}(2)\\ x^{(0)}(3)\\ x^{(0)}(4)\\ x^{(0)}(5)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3.278\\ 3.337\\ 3.390\\ 3.679\end{bmatrix}$$

$$\because \begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}=(B^TB)^{-1}B^TY$$

$$B^TB=\begin{bmatrix}-4.513 & -7.821 & -11.184 & -14.719\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-4.513 & 1\\ -7.821 & 1\\ -11.184 & 1\\ -14.719 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}423.243 & -38.236\\ -38.236 & 4\end{bmatrix}$$

$$(B^TB)^{-1}=\begin{bmatrix}423.243 & -38.236\\ -38.236 & 4\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}0.017317 & 0.165537\\ 0.165537 & 1.832364\end{bmatrix}$$

$\therefore$

$$\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.017317 & 0.165537\\ 0.165537 & 1.832364\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-4.513 & -7.821 & -11.184 & -14.719\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3.278\\ 3.337\\ 3.390\\ 3.679\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-0.03720\\ 3.06536\end{bmatrix}$$

第四步：确定模型：

灰微分方程的白化方程是：$\frac{dx^{(1)}}{dt} - 0.03720x^{(1)} = 3.06536$

时间响应式：

$$\hat{X}^{(1)}(k+1) = [X^{(0)}(1) - \frac{b}{a}]e^{-ak} + \frac{b}{a} = (2.874 - \frac{3.06536}{-0.0372})e^{0.0372k} + \frac{3.06536}{-0.0372}$$

整理得：$\hat{X}^{(1)}(k+1) = 85.266534e^{0.0372k} - 82.392534$

第五步：求 $X^{(1)}$ 的模拟值 $\hat{X}^{(1)}$ 和其还原值 $\hat{X}^{(0)}$

当 k=0时，$\hat{x}^{(1)}(1) = 85.266534 - 82.392534 = 2.874$

当 k=1时，$\hat{x}^{(1)}(2) = 85.266534e^{0.0372} - 82.392534 = 6.1060$

当 k=2时，$\hat{x}^{(1)}(3) = 85.266534e^{0.0744} - 82.392534 = 9.4606$

当 k=3时，$\hat{x}^{(1)}(4) = 85.266534e^{3\times0.0372} - 82.392534 = 12.9423$

当 k=4时，$\hat{x}^{(1)}(5) = 85.266534e^{4\times0.0372} - 82.392534 = 16.5560$

因此：$\hat{X}^{(1)} = (2.874, 6.1060, 9.4606, 12.9423, 16.5560)$

$\hat{X}^{(0)} = (2.874, 3.232, 3.3546, 3.4817, 3.6137)$

第六步：检验误差：

序号	实际数据 $X^{(0)}(k)$	模拟数据 $\hat{X}^{(0)}(k)$	残差 $\varepsilon(k) = X^{(0)}(k) - \hat{X}^{(0)}(k)$	相对误差 $\Delta k = \frac{\lvert\varepsilon(k)\rvert}{X^{(0)}(k)} \times 100\%$
1	2.874			
2	3.278	3.232	0.046	1.402
3	3.337	3.355	-0.018	0.526
4	3.390	3.482	-0.092	2.705
5	3.679	3.614	0.065	1.776

第七步：预测

由公式：$\hat{X}^{(1)}(k+1) = 85.266534e^{0.0327k} - 82.392534$

2010年， k=5时，$\hat{x}^{(1)}(6) = 20.3066$　$\hat{x}^{(0)}(6) = 20.3066 - 16.5560 = 3.7507$

用同样的方法预测 2011年，即 k=6时的预测值。

说明：

设原始数列 $X^{(0)}=[x^{(0)}(1),x^{(0)}(2),\cdots,x^{(0)}(n)]$

1、用 $X^{(0)}=[x^{(0)}(1),x^{(0)}(2),\cdots,x^{(0)}(n)]$ 建立的 GM(1,1)模型称为全数据 GM(1,1)；

2、用 $X^{(0)}=[x^{(0)}(k_0),x^{(0)}(k_0+1),\cdots,x^{(0)}(n)]$ 建立的 GM(1,1)模型称为部分数据 GM(1,1)，其中 $k_0>1$；

3、设 $x^{(0)}(n+1)$ 为最新信息，将 $x^{(0)}(n+1)$ 置入 $X^{(0)}$，称：

用 $X^{(0)}=[x^{(0)}(1),x^{(0)}(2),\cdots,x^{(0)}(n),x^{(0)}(n+1)]$ 建立的模型为新息 GM(1,1)；

4、置入新息 $X^{(0)}(n+1)$，去掉最老息 $X^{(0)}(1)$，称：

用 $X^{(0)}=[x^{(0)}(2),x^{(0)}(3),\cdots,x^{(0)}(n),x^{(0)}(n+1)]$ 建立的模型为新陈代谢 GM(1,1)。

上机作业：

年份	2004	2005	2006	2007	2008	2009
原始数据	2.874	3.278	3.337	3.390	3.679	
新息数据	2.874	3.278	3.337	3.390	3.679	3.850
新陈代谢		3.278	3.337	3.390	3.679	3.850

试建立新息 GM(1,1)和新陈代谢 GM(1,1)模型，并预测到 2014年各年的数据。

二、GM(1,N)模型

设 $X_1^{(0)}=[x_1^{(0)}(1),x_1^{(0)}(2),\cdots,x_1^{(0)}(n)]$ 为系统行为特征序列。

$X_2^{(0)}=[x_2^{(0)}(1),x_2^{(0)}(2),\cdots,x_2^{(0)}(n)]$

$X_3^{(0)}=[x_3^{(0)}(1),x_3^{(0)}(2),\cdots,x_3^{(0)}(n)]$

$\vdots$

$X_N^{(0)}=[x_N^{(0)}(1),x_N^{(0)}(2),\cdots,x_N^{(0)}(n)]$

为系统相关因素序列。

对上述 N个原始序列作依一次累加生成，形成相应的 1-AGO序列 $X_i^{(1)},i=1,2,\cdots N$

$X_1^{(1)}=[x_1^{(1)}(1),x_1^{(1)}(2),\cdots x_1^{(1)}(n)]$

$X_2^{(1)}=[x_2^{(1)}(1),x_2^{(1)}(2),\cdots x_2^{(1)}(n)]$

$\vdots$

$$X_i^{(1)} = [x_i^{(1)}(1), x_i^{(1)}(2), \cdots x_i^{(1)}(n)]$$

$$\vdots$$

$$X_N^{(1)} = [x_N^{(1)}(1), x_N^{(1)}(2), \cdots x_N^{(1)}(n)]$$

对 $X_1^{(1)}$ 作紧邻均值生成，形成序列 $Z_1^{(1)}$ ：

$Z_1^{(1)} = [z_1^{(1)}(2), z_1^{(1)}(3), \cdots, z_1^{(1)}(n)]$，称 $X_1^{(0)}(k) + aZ_1^{(1)}(k) = \sum_{i=2}^{N} b_i x_i^{(1)}(k)$ 为 GM(1,1)模型，其中：a,b_2 ，b_3 ，$\cdots$ ，b_N 为待定系数。

在 GM(1,1)模型中， -a为系统发展系数， $b_i x_i^{(1)}(k)$ 称为驱动项，b_i 称为驱动系数

令 $B = \begin{bmatrix} -Z_1^{(1)}(2) & -Z_2^{(1)}(2) & -Z_3^{(1)}(2) & \cdots & -Z_N^{(1)}(2) \\ -Z_1^{(1)}(3) & -Z_2^{(1)}(3) & -Z_3^{(1)}(3) & \cdots & -Z_N^{(1)}(3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ -Z_1^{(1)}(n) & -Z_2^{(1)}(n) & -Z_3^{(1)}(n) & \cdots & -Z_N^{(1)}(n) \end{bmatrix}$ $Y = \begin{bmatrix} X_1^{(0)}(2) \\ X_1^{(0)}(3) \\ \vdots \\ X_1^{(0)}(n) \end{bmatrix}$

$$X_1^{(1)} = [x_1^{(1)}(1), x_1^{(1)}(2), \cdots x_1^{(1)}(n)]$$

$$X_2^{(1)} = [x_2^{(1)}(1), x_2^{(1)}(2), \cdots x_2^{(1)}(n)]$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$X_i^{(1)} = [x_i^{(1)}(1), x_i^{(1)}(2), \cdots x_i^{(1)}(n)]$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$X_N^{(1)} = [x_N^{(1)}(1), x_N^{(1)}(2), \cdots x_N^{(1)}(n)]$$

对 $X_1^{(1)}$ 作紧邻均值生成，形成序列 $Z_1^{(1)}$ ：

$$Z_1^{(1)} = [z_1^{(1)}(2), z_1^{(1)}(3), \cdots, z_1^{(1)}(n)]$$

称：$X_1^{(0)}(k) + aZ_1^{(1)}(k) = \sum_{i=2}^{N} b_i x_i^{(1)}(k)$ 为 GM(1,N)模型，其中：$a, b_{2,} b_3, \cdots b_N$ 为待定系数。

在 GM(1,N)模型中， -a 为系统发展系数，$b_i x_i^{(1)}(k)$ 称为驱动项，b_i 称为驱动系数，

令：$B=\begin{bmatrix} -z_1^{(1)}(2) & x_2^{(1)}(2) & x_3^{(!)}(2) & \cdots & x_N^{(1)}(2) \\ -z_1^{(1)}(3) & x_2^{(1)}(3) & x_3^{(1)}(3) & \cdots & x_N^{(1)}(3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ z_1^{(1)}(n) & x_2^{(1)}(n) & x_3^{(1)}(2) & & x_N^{(1)}(n) \end{bmatrix} \qquad Y=\begin{bmatrix} x_1^{(0)}(2) \\ x_1^{(0)}(3) \\ \vdots \\ x_1^{(0)}(n) \end{bmatrix}$

则待定系数：$a,b_{2,}b_3,\cdots b_N$ 由下式确定：

$\hat{a}=[a,b_{2,}b_3,\cdots,b_N]^T=(B^TB)^{-1}B^TY$，GM(1,1) 灰微分方程的一般形式为：

$$\frac{dx_1^{(1)}}{dt}+ax_1^{(1)}=\sum_{i=2}^{N}b_ix_i^{(1)}$$

该微分方程的解（即时间响应式）为：

$$\hat{X}_1^{(1)}(k+1)=[x_1^{(0)}(1)-\frac{1}{a}\sum_{i=2}^{N}b_ix_i^{(1)}(k+1)]e^{-ak}+\frac{1}{a}\sum_{i=2}^{N}b_ix_i^{(1)}(k+1)$$

累减还原式为：

$$\hat{X}_1^{(0)}(k+1)=\hat{X}_1^{(1)}(k+1)-\hat{X}_1^{(1)}(k)$$

应用：例为：

设系统行为特征序列为：

$$X_1^{(0)}=(2.874,3.278,3.307,3.390,3.679)$$

相关因素数据序列：

$$X_2^{(0)}=(7.040,7.645,8.075,8.530,8.774)$$

试建立 GM(1,2)模型，当 $X_2^{(0)}(6)=8.800$ 时，问 $X_1^{(0)}(6)=?$

解：第一步：对 $X_1^{(0)}$ 和 $X_2^{(0)}$ 作 1—AGO，得：

$$X_1^{(1)}=[x_1^{(1)}(1),x_1^{(1)}(2),x_1^{(1)}(3),x_1^{(1)}(4),x_1^{(1)}(5)]=(2.874,6.152,9.459,12.849,16.528)$$

$$X_2^{(1)}=[x_2^{(1)}(1),x_2^{(1)}(2),x_2^{(1)}(3),x_2^{(1)}(4),x_2^{(1)}(5)]=(7.040,14.685,22.760,31.290,40.064)$$

第二步：对 $X_1^{(1)}$ 作紧邻均值生成，得：

$$Z_1^{(1)}=[z_1^{(1)}(2),x_1^{(1)}(3),z_1^{(1)}(4),z_1^{(1)}(5)]=(4.5130,7.8055,11.154,14.6885)$$

第三步：计算待定系数 a,b_2，可得：

$$B=\begin{bmatrix}-Z_1^{(1)}(2) & X_2^{(1)}(2)\\ -Z_1^{(1)}(3) & X_2^{(1)}(3)\\ -Z_1^{(1)}(4) & X_2^{(1)}(4)\\ -Z_1^{(1)}(5) & X_2^{(1)}(5)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4.5130 & 14.685\\ -7.8055 & 22.760\\ -11.154 & 31.290\\ -14.6885 & 40.064\end{bmatrix}$$

$$Y=[x_1^{(0)}(2),x_1^{(0)}(3),x_1^{(0)}(4),x_1^{(0)}(5)]^T=[3.278,3.307,3.390,3.679]$$

$$B^TB=\begin{bmatrix}-4.5130 & -7.8055 & -11.154 & -14.6885\\ 14.685 & 22.760 & 31.290 & 40.064\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-4.5130 & 14.685\\ -7.8055 & 22.760\\ -11.154 & 31.290\\ -14.6885 & 40.064\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}421.456748 & -1181.415309\\ -1181.41531 & 3317.855021\end{bmatrix}$$

$$(B^TB)^{-1}=\begin{bmatrix}1.280900 & 0.456100\\ 0.456100 & 0.162709\end{bmatrix}$$

$$B^TY=\begin{bmatrix}-4.5130 & -7.8055 & -11.154 & -14.6885\\ 14.685 & 22.760 & 31.290 & 40.064\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3.278\\ 3.307\\ 3.390\\ 3.679\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-132.457454\\ 376.873306\end{bmatrix}$$

$$\therefore\begin{bmatrix}a\\ b_2\end{bmatrix}=(B^TB)^{-1}B^TY=\begin{bmatrix}1.280900 & 0.456100\\ 0.456100 & 0.162709\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-132.457454\\ 376.873306\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2.2273\\ 0.9067\end{bmatrix}$$

第四步：确定模型，时间响应式为（灰微分方程）： $\dfrac{dx_1^{(1)}}{dt}+2.2273x_1^{(1)}=0.9067x_2^{(1)}$

$$\hat{X}_1^{(1)}(k+1)=[x_1^{(0)}(1)-\frac{b_2}{a}x_2^{(1)}(k+1)]e^{-ak}+\frac{b_2}{a}x_2^{(1)}(k+1)$$
$$=(2.874-\frac{0.9067}{2.2273}\times x_2^{(1)}(k+1)e^{-202273k}+\frac{0.9067}{2.2273}\times x_2^{(1)}(k+1)$$
$$=(2.874-0.4071x_2^{(1)}(k+1)e^{-2.2273k}+0.4071x_2^{(1)}(k+1)$$

第五步：求 $X_1^{(1)}$ 的模拟值 $\hat{X}_1^{(1)}$ 和其还原值 $\hat{X}_1^{(0)}$。

K=1 时， $\hat{X}_1^{(1)}(2)=5.6433;$ K=2 时， $\hat{X}_1^{(1)}(3)=9.1908;$

K=3 时， $\hat{X}_1^{(1)}(4)=12.7251;$ K=4 时， $\hat{X}_1^{(1)}(5)=16.3073;$

$\therefore$

$$\hat{X}_1^{(1)}=[\hat{x}_1^{(1)}(1),\hat{x}_1^{(1)}(2),\hat{x}_1^{(1)}(3),\hat{x}_1^{(1)}(4),\hat{x}_1^{(1)}(5)]=(2.8740,5.6433,9.1908,12.7251,16.3073)$$

$\hat{X}_1^{(1)}$ 的 1-IAGO 为：$\hat{X}_1^{(0)}(k) = \hat{X}_1^{(1)}(k) - \hat{X}_1^{(1)}(k-1)$

∴

$\hat{X}_1^{(0)} = [\hat{x}_1^{(0)}(1), \hat{x}_1^{(0)}(2), \hat{x}_1^{(0)}(3), \hat{x}_1^{(0)}(4), \hat{x}_1^{(0)}(5)] = (2.874, 2.769, 3.548, 3.534, 3.582)$

第六步：检验误差：

序号	原始数据 $X_1^{(0)}(k)$	模拟值 $\hat{X}_1^{(0)}(k)$	残差 $\varepsilon(k) = x_1^{(0)}(k) - \hat{x}_1^{(0)}(k)$	相对误差 $\Delta k = \left\lvert \frac{\varepsilon(k)}{x^{(0)}(k)} \right\rvert$
2	3.278	2.769	0.509	15.52%
3	3.307	3.548	-0.241	7.27%
4	3.390	3.534	-0.144	4.26%
5	3.679	3.582	-0.097	2.63%

第七步：预测：

由公式：$\hat{X}_1^{(1)}(k+1) = (2.874 - 0.4071 x_2^{(1)}(k+1) e^{-2.2273k} + 0.4071 x_2^{(1)}(k+1)$

当 k=5，$X_2^{(0)}(6) = 8.80$时，　$X_2^{(1)}(6) = 8.80 + 40.064 = 48.864$时，

$\hat{X}_1^{(1)}(5+1) = (2.874 - 0.4071 \times 48.864) e^{-2.2273 \times 5} + 0.4071 \times 48.864 = 19.8912$

∴　$\hat{X}_1^{(0)}(b) = 19.8912 - 16.3073 = 3.5838$

上机作业：

试建立下列 GM(1,3)模型：

$X_1^{(0)} = (2.874, 3.278, 3.307, 3.390, 3.679)$

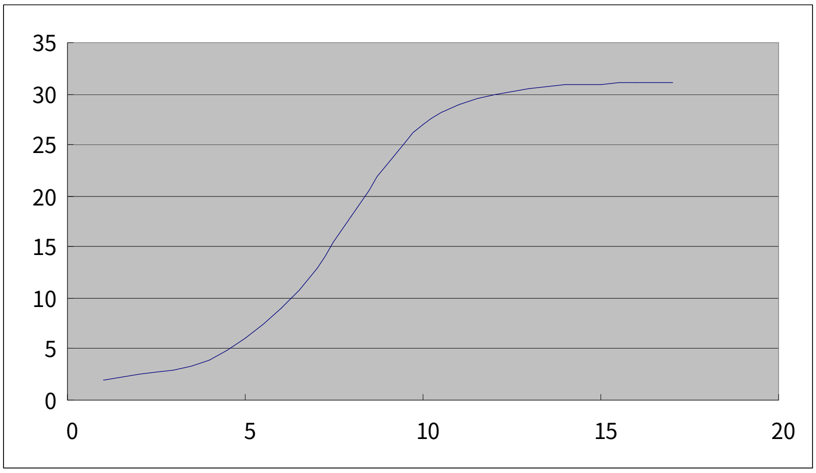
$X_2^{(0)} = (7.040, 7.645, 8.075, 8.530, 8.774)$

$X_3^{(0)} = (1.504, 1.872, 1.938, 2.051, 2.167)$

当 $X_2^{(0)}(6) = 8.80$,　$X_3^{(0)}(6) = 2.30$ 时，　$X_1^{(0)}(6) = ?$,（答案：3.7681）

三、GM(2,1)--灰色 Verhulst 模型

Verhulst 模型主要用来描述具有饱和状态的过程，即 S 型过程。生物的生长繁殖，人口的增长以及产品的市场饱和状况都可以用此模型。



例如：某地区人口数增长情况如下：

年份	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
$X^{(1)}$（人口 :万人）	20.00	23.00	27.00	29.00	30.00	30.50	30.80
$X^{(0)}$ （增量）	20.00	3.00	4.00	2.00	1.00	0.50	0.30

在实际问题中，常遇到原始数据本身呈 S 形的过程，如上例，这时我们取原始数据序列为 $X^{(1)}$，其 1-IAG 为 $X^{(0)}$， $Z^{(1)}$ 为 $X^{(1)}$ 的紧邻均值生成序列。即：

$$X^{(1)}=[x^{(1)}(1),x^{(1)}(2),\ldots x^{(1)}(n),$$

$$X^{(0)}=[x^{(0)}(1),x^{(0)}(2),\ldots x^{(0)}(n),$$

其中： $X^{(0)}(1)=X^{(1)}(1)$

$$X^{(0)}(k)=X^{(1)}(k)-X^{(1)}(k-1)$$

$$Z^{(1)}=[z^{(1)}(2),z^{(1)}(3),\ldots z^{(1)}(n),$$

其中：$Z^{(1)}(k)=0.5X^{(1)}(k)+0.5X^{(1)}(k-1)$

定义：则称： $X^{(0)}(k)+aZ^{(1)}(k)=b[Z^{(1)}(k)]^2$ 为灰色 Verhulst 模型。

建立 Verhulst 模型时，直接对 $X^{(1)}$ 进行模拟，而不必作累减还原。

灰色 Verhulst 模型的微分方程一般形式是：$\dfrac{dx^{(1)}}{dt}+ax^{(1)}=b[x^{(1)}]^2$ 为其白化方程。

此白化方程的解，即 Verhulst 模型的时间响应式为：

$$\hat{X}^{(1)}(k+1)=\frac{ax^{(1)}(1)}{bx^{(1)}(1)+[a-bx^{(1)}(1)]e^{ak}}$$

也即：$\hat{X}^{(1)}(k+1)=\dfrac{a/b}{1+[\dfrac{a}{bx^{(1)}(1)}-1]e^{ak}}$

待定系数 a,b 由公式求得：$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}=(B^TB)^{-1}B^TY$

其中：$B=\begin{bmatrix} -Z^{(1)}(2) & [Z^{(1)}(2)]^2 \\ -Z^{(1)}(3) & [Z^{(1)}(3)]^2 \\ \vdots & \vdots \\ -Z^{(1)}(n) & [Z^{(1)}(n)]^2 \end{bmatrix}$ $\qquad Y=\begin{bmatrix} x^{(0)}(2) \\ x^{(0)}(3) \\ \vdots \\ x^{(0)}(n) \end{bmatrix}$

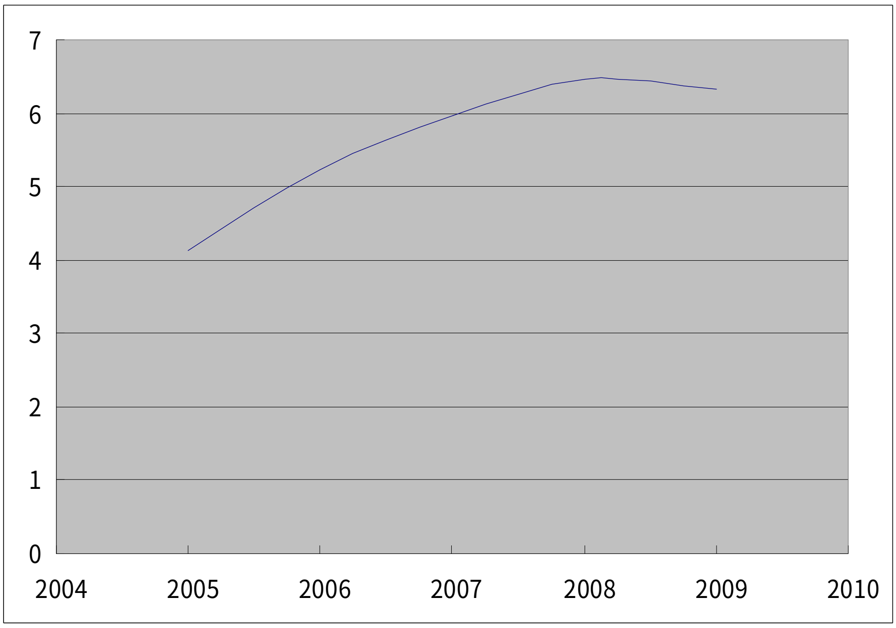
例五：

某省农用大中型拖拉机拥有量（万台），原始数据如下：

年份	2005	2006	2007	2008	2009
拖拉机（万台）	4.1299	5.2382	5.9666	6.4590	6.3160

试用 Verhulst 模型预测 2010 年的拖拉机数量。

解：第一步：作散点图可知，原始数据曲线接近 S 形增长曲线，故可利用 Verhulst 模型。



第二步：对原始数据进行处理：

令： $X^{(1)}=[x^{(1)}(1),x^{(1)}(2),x^{(1)}(3),x^{(1)}(4),x^{(1)}(5)]$

$$=(4.1299,5.2382,5.9666,6.4590,6.3160)$$

则 $X^{(0)}$ 为 $X^{(1)}$ 的 1-IAGO 序列：

$$X^{(0)}=[x^{(0)}(1),x^{(0)}(2),x^{(0)}(3),x^{(0)}(4),x^{(0)}(5)]$$

$$=(4.1299,1.1083,0.7284,0.4924,-0.1430)$$

而 $Z^{(1)}$ 为 $X^{(1)}$ 的紧邻均值生成序列：

$$Z^{(1)}=[z^{(1)}(2),z^{(1)}(3),z^{(1)}(4),z^{(1)}(5)]$$

$$=(4.68405,5.60240,6.21280,6.38750)$$

第三步：计算待定系数 a,b.

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}=(B^TB)^{-1}B^TY$$

$$B=\begin{bmatrix} -Z^{(1)}(2) & [Z^{(1)}(2)]^2 \\ -Z^{(1)}(3) & [Z^{(1)}(3)]^2 \\ -Z^{(1)}(4) & [Z^{(1)}(4)]^2 \\ -Z^{(1)}(5) & [Z^{(1)}(5)]^2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -4.68405 & 21.9403 \\ -5.60240 & 31.3869 \\ -6.21280 & 38.5989 \\ -6.38750 & 40.8002 \end{bmatrix}$$

$$Y=[X^{(0)}(2),X^{(0)}(3),X^{(0)}(4),X^{(0)}(5)]^T=[1.1083,0.7284,0.4924,-0.1430]^T$$

$$B^TB=\begin{bmatrix} 132.7263 & -779.0296 \\ -779.0296 & 4621.041016 \end{bmatrix} \qquad (B^TB)^{-1}=\begin{bmatrix} 0.716850 & 0.120849 \\ 0.120849 & 0.020589 \end{bmatrix}$$

$$B^TY=\begin{bmatrix} -11.417291 \\ 60.350337 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix}=(B^TB)^{-1}B^TY=\begin{bmatrix} -0.891648 \\ -0.137257 \end{bmatrix}$$

注意：所计算出来的系数 a 必须小于零。（作解释）

第四步：确定模型：

灰微分方程是：$\frac{dx^{(1)}}{dt} - 0.891648x^{(1)} = -0.137257[x^{(1)}]^2$

时间响应式为：

$$\hat{X}^{(1)}(k+1) = \frac{ax^{(1)}(1)}{bx^{(1)}(1)+[a-bx^{(1)}(1)]e^{ak}} = \frac{3.682417}{0.566857+0.324791e^{-0.891648k}}$$

整理得：$\hat{X}^{(1)}(k+1) = \frac{6.49619}{1+0.57297e^{-0.891648k}}$

第五步：模拟并检验残差：

$k=0$ 时，$\hat{X}^{(1)}(1) = \frac{3.682417}{0.891648} = 4.1299$

$k=1$ 时，$\hat{X}^{(1)}(2) = \frac{3.682417}{0.700015} = 5.2605$

$k=2$ 时，$\hat{X}^{(1)}(3) = \frac{3.682417}{0.621449} = 5.9256$

$k=3$ 时，$\hat{X}^{(1)}(4) = \frac{3.682417}{0.589239} = 6.2494$

$k=4$ 时，$\hat{X}^{(1)}(5) = \frac{3.682417}{0.576033} = 6.3927$

残差$\varepsilon(k) = x^{(1)}(k) - \hat{x}^{(1)}(k)$，其中：k=2,3,4,5

$$\therefore\ \varepsilon = [\varepsilon(2), \varepsilon(3), \varepsilon(4), \varepsilon(5)] = (-0.0223, 0.0411, 0.2096, -0.0767)$$

第六步：预测

当 k=5 时，$\hat{X}^{(1)}(6) = \frac{3.682417}{0.570619} = 6.4534$

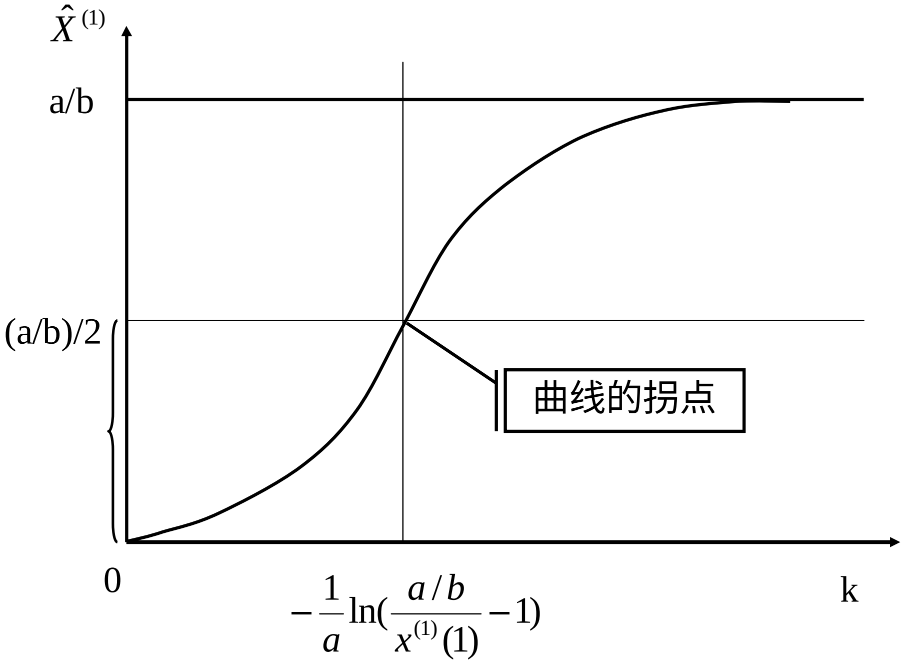
因此，2010 年该省拥有的拖拉机的数量为 6.4534 万台。

说明：

Verhulst 模型的时间响应式为：

$\hat{X}^{(1)}(k+1) = \dfrac{a/b}{1+(\dfrac{a/b}{x^{(1)}(1)}-1)e^{ak}}$，其中：a<0, k>o 为正整数

可以证明：当 $k = -\frac{1}{a}\ln(\frac{a/b}{x^{(1)}(1)}-1)$ 时，$\hat{X}^{(1)}(k+1) = \frac{a/b}{2}$，此点的增长速率（即$\frac{d\hat{x}^{(1)}}{dk}$）最大，此点为曲线的拐点。这一结论对生物资源的合理利用和开发有着十分重要的意义。（作解释）



上机作业：

某产品在当地市场上 2008 年各月的销售额如下：

月份	1	2	3	4	5	6
销售额（万元）	2.00	2.12	2.22	2.45	2.68	3.17
月份	7	8	9	10	11	12
销售额（万元）	3.59	3.88	3.95	4.03	4.05	4.04

试应用 Verhulst 模型预测 2009 年各月的销售额。

第 6节 GM上机操作说明

一、灰关联定律 I

程序：GLD1.BAS

① 进入：QBASIC GLD1

② 输入数据

DATA ***,***, … , *** (参考序列)

DATA ***,***, ... , *** (被比较序列 1)

DATA ***,***, … , ***（被比较序列 2）

⋮ ⋮ ⋮ ⋮

DATA ***,***, …, ***（被比较序列 n-1）

③ 运行：Run(Shift+F5)

提示：n=? (本例为 5) n：原始数据的行数

M=?（本例为 4） M：原始数据的列数

Junzhi(1)? Chuzhi(0)?? (本例选 0)

RH=? （本例选 0.5） RH：ρ值

再几次回车后， 回到 Edit 状态

二、灰关联定律 II

程序：GLD2.BAS

① 进入：QBASIC GLD2

② 输入数据

DATA ***,***, … , *** (参考序列)

DATA ***,***, … , *** (被比较序列 1)

DATA ***,***, … , ***（被比较序列 2 ）

⋮ ⋮ ⋮ ⋮

DATA ***,***, … , ***（被比较序列 n-1）

DATA　(初值 1)，((初值 2) , … ,　(初值 n)

③ 运行：Run(Shift+F5)

提示：x　　　　　　　　y　　　　x ：原始数据的行数； y ：原始数据的列数

? 5, 4　　　　　　　　x 和 y 用半角逗号隔开

? 0.5　　　　　　　　０．５为ρ值

三、GM(1,1)模型

应用程序：GM11.BAS

① 进入：QBASIC　GM11

② 输入数据

DATA　2.874, 3.278, 3.337, 3.390, 3.679

③ 运行：Run(Shift+F5)

提示：M=5　　　　　　　　Ｍ：原始数据个数（列数）

the initional year To =? 2005　　　　原始数据起始年份

the numbers of forecasting　k=? 5　　　　要预测的数据个数

可以得到预测结果

四、GM(1,N)模型

应用程序：GM1N.BAS

① 进入：QBASIC　GM1N

② 输入数据

DATA　***,***,　…, ***　(系统行为特征序列)

DATA　***,***,　… , ***　(系统影响因素序列 1)

DATA　***,***,　… , ***　(系统影响因素序列 2)

⋮　⋮　⋮　⋮

DATA　***,***,　… , ***　(系统影响因素序列 N-1)

③ 运行：Run(Shift+F5)

提示：N=? 2　　　　　　原始数据行数（包括系统特征行为和系统影响因素）

　　　M =? 5　　　　　　原始数据列数（不包含系统发展系数）

得到时间响应式为：

$$\hat{x}_1(t+1)=(2.874-0.4070747x_2)e^{-2.227321t}+0.4070747x_2$$

五、GM(Verhulst)模型

程序：GMVER.BAS

① 进入： QBASIC　GMVER

② 输入数据：

要求输原始序列 $X^{(1)}$ 的 1-IAGO

DATA　4.1299,1.1083,0.7284,0.4924,-0.1430

③ 运行：Run(Shift+F5)

提示： M=?　5　 得时间响应式　　　　　　原始数据个数（列数）

　　　K=?　5　　　　　　　　　　　　　　要预测的数据个数